

Solusi Kuis ke-2 IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS) – Relasi dan Fungsi, Teori Bilangan

Dosen: Rinaldi Munir, Harlili

Rabu, 9 Oktober 2013

Waktu: Bebas (*take home quiz*), dikumpulkan besok paling lambat pukul 12.00

1. Diketahui $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan relasi R pada A , yaitu $R = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (1, 4), (3, 5)\}$. Tentukan klosur setangkep dari R .

Jawaban: Klosur setangkep dari R didefinisikan sebagai $R \cup R^{-1}$. Untuk itu, cari dulu R^{-1} .

$$R^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4), (4, 1), (5, 3)\}$$

$$\begin{aligned} R \cup R^{-1} &= \{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (1, 4), (3, 5)\} \cup \{(2, 1), (3, 2), (5, 4), (4, 1), (5, 3)\} \\ &= \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 5), (5, 4), (1, 4), (4, 1), (3,5), (5, 3)\} \end{aligned}$$

2. Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Kemudian terdapat relasi R yang memenuhi: $R : (x + y) \in A$
Periksalah apakah relasi tersebut bersifat : a) Setangkep. b)Tolak setangkep. c)Refleksif. d)Menghantar.

Jawaban:

- (a) Relasi R bersifat setangkep karena untuk semua nilai a dan b , jika $(a,b) \in R$ maka $(b,a) \in R$. Sifat ini diakibatkan oleh sifat komutatif penjumlahan $x + y$
- (b) Relasi R tidak bersifat tolak setangkep karena terdapat relasi $(a,b) \in R$ dan $(b,a) \in R$ dimana $a \neq b$, contohnya relasi $(1,2)$ dan $(2,1)$
- (c) Relasi R tidak bersifat refleksif karena terdapat $a \in A$ yang tidak memenuhi $(a,a) \in R$ antara lain nilai $a=3, 4$, dan 5 yang menghasilkan relasi $(3,3)$, $(4,4)$, dan $(5,5)$. Ketiganya tidak termasuk anggota R
- (d) Relasi R tidak bersifat menghantar karena terdapat nilai a, b , dan c dimana $(a,b) \in R$ dan $(b,c) \in R$ namun $(a,c) \notin R$. Contohnya untuk $a=4, b = 1, c = 2$. Relasi $(4,1)$ anggota himpunan R dan relasi $(1,2)$ anggota himpunan R , namun $(4,2)$ bukan anggota himpunan R .

3. Misalkan R adalah relasi dalam kosakata bahasa Indonesia(dalam bentuk string, sehingga seluruh karakter termasuk anggota) sedemikian sehingga $a R b$ jika dan hanya jika $l(a) = l(b)$, dengan $l(x)$ adalah panjang dari kata x , jadi $l(\text{"struktur diskrit"})=16$. Apakah R relasi yang setara/ekivalen?

Jawaban: Ya, akan dibuktikan R refleksif,simetris dan transitif.

- a. Refleksif. Karena $l(a) = l(a)$, sehingga $a R a$ untuk semua string a .
- b. Setangkep. Misalkan $a R b$, maka $l(a) = l(b)$, sehingga $l(b) = l(a)$ dan $b R a$.
- c. Menghantar.Misalkan $a R b$ dan $b R c$, maka $l(a) = l(b)$ dan $l(b) = l(c)$, sehingga $l(a)= l(c)$, maka $a R c$.

4. Perhatikan bahwa jika $a \mid bc$ maka $a \mid PBB(a, b) PBB(a, c)$

Jawaban: Dengan memanfaatkan kombinasi linier maka dapat ditulis

$$PBB(a, b) = ax + by \quad (1) \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$PBB(a, c) = am + cn \quad (2) \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

Sementara itu dari soal diketahui $a \mid bc$ sehingga dapat ditulis

$$bc = ak \quad (3) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Selanjutnya perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} PBB(a, b) PBB(a, c) &= (ax + by)(am + cn) = a^2mx + acnx + abmy + bcny \\ &= a(amx + cnx + bmy) + akny = a(amx + cnx + bmy + kny) \end{aligned}$$

Atau dengan kata lain $a \mid PBB(a, b) PBB(a, c)$

5. Seorang wanita pergi ke pasar membawa sekeranjang telur. Setiba di pasar keranjang tersebut jatuh dan terinjak oleh seorang pria. Pria tersebut meminta maaf dan berjanji akan mengganti telur-telur tersebut. Namun sang wanita tidak ingat berapa telur yang ada di dalam keranjangnya. Yang dia ingat adalah jika dia mengambil dua telur berulang-ulang maka bersisa 1 telur di dalam keranjang, begitu juga jika dia mengambil 3, atau 5 telur berulang-ulang. Namun jika ia mengambil 7 telur berulang-ulang maka tidak ada telur yang bersisa di keranjang. Berapakah jumlah telur paling sedikit yang dimiliki oleh wanita tersebut?

Jawaban:

$$x \equiv 1 \pmod{2} \quad (1)$$

$$x \equiv 1 \pmod{3} \quad (2)$$

$$x \equiv 1 \pmod{5} \quad (3)$$

$$x \equiv 0 \pmod{7} \quad (4)$$

Dari (1) didapat

$$x = 2k_1 + 1 \quad (5)$$

Substitusikan (5) ke (2)

$$2k_1 + 1 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$k_1 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$k_1 = 3k_2 \quad (6)$$

Substitusikan (6) ke (5)

$$x = 6k_1 + 1 \quad (7)$$

Substitusikan (7) ke (3)

$$6k_1 + 1 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$k_1 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$k_1 = 5k_3 \quad (8)$$

Substitusikan (8) ke (7)

$$x = 30k_3 + 1 \quad (9)$$

Substitusikan (9) ke (4)

$$30k_3 + 1 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$30k_3 + 1 \equiv 91 \pmod{7}$$

$$30k_3 \equiv 90 \pmod{7}$$

$$k_3 \equiv 3 \pmod{7}$$

$$k_3 = 7k_4 + 3 \quad (10)$$

Substitusikan (10) ke (9)

$$x = 210k_4 + 91$$

Ini merupakan solusi dari sistem kekongruenan di atas. Maka banyak telur minimal yang dimiliki wanita tersebut adalah 91.

6. Tiga kemunculan terakhir komet Halley adalah pada tahun 1835, 1910, dan 1986. Kemunculan berikutnya diprediksi akan terjadi pada tahun 2061. Dengan bantuan Teorema Fermat buktikan bahwa $1835^{1910} + 1986^{2061} \equiv 0 \pmod{7}$

Jawaban: Karena 7 adalah bilangan prima dan $7 \nmid 1835$ serta $7 \nmid 1986$ maka soal ini memenuhi syarat Teorema Fermat.

Selanjutnya berdasarkan teorema Fermat

$$1835^6 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$1835^{1910} \pmod{7} \equiv 1835^{6 \cdot 318 + 2} \pmod{7} \equiv 1835^2 \pmod{7} \equiv 1 \pmod{7}$$

$$1986^6 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$1986^{2061} \pmod{7} \equiv 1986^{6 \cdot 343 + 3} \pmod{7} \equiv 1986^3 \pmod{7} \equiv 5^3 \pmod{7} \equiv 6 \pmod{7}$$

Maka,

$$1835^{1910} + 1986^{2061} \equiv 1 + 6 \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7}$$